Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías

Universidad Nacional de Santiago del Estero / UNSE

LÓGICA II- LÓGICA MATEMÁTICA

GUÍA N°1

CARRERAS: LICENCIATURA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN LICENCIATURA EN MATEMÁTICA (C.C)

EQUIPO DOCENTE:

- **Dr. Maximiliano Celmo David Budán**
- **Prof. Ximena Villarreal**
- **Lic. Sonia Arias**

AÑO 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍAS

CARRERA: **LICENCIATURA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN – LICENCIATURA EN MATEMATICA (CC)**

ASIGNATURA: **LÓGICA II – LÓGICA MATEMÁTICA**

AÑO: 2022

GUÍA DE TRABAJO TEÓRICO-PRÁCTICO Nº 1

CAPITULO I: Sistemas Axiomáticos del Cálculo Proposicional

Enunciados, enunciados simples y compuestos, variables de enunciado y formas enunciativas. Tabla de valores de verdad. Implicación y equivalencia lógica. Leyes lógicas. Conjunto adecuado de conectivas. El Método axiomático. Definición sintáctica del Cálculo proposicional. Alfabeto del lenguaje. Gramática. Axiomas. Esquemas de Axiomas. Reglas de inferencia y Reglas Derivadas. Definiciones. Teoremas. Demostraciones y Deducciones. Definición semántica del Cálculo Proposicional. Conjunto de significados a asignar a las fbf. Definición semántica de conectivas. Definición semántica de deducción correcta. El teorema de la deducción en la teoría semántica. Fórmulas satisfacibles y Validez semántica de fórmulas.

INTRODUCCIÓN:

La representación del conocimiento y el razonamiento es un área de la inteligencia artificial que surge como una aplicación de fundamentos matemáticos para resolver situaciones problemáticas que el ser humano posee en su accionar cotidiano y profesional. Su objetivo fundamental es representar el conocimiento de una manera que facilite la inferencia (sacar conclusiones) a partir de dicho conocimiento. Analiza cómo pensar formalmente, cómo usar un sistema de símbolos para representar un dominio del discurso (aquello de lo que se puede hablar), junto con funciones que permitan inferir (realizar un razonamiento formal) sobre los objetos. Generalmente, se usa algún tipo de lógica para proveer una semántica formal de cómo las funciones de razonamiento se aplican a los símbolos del dominio del discurso, además de proveer operadores como cuantificadores existenciales, cuantificadores universales, entre otros. Esto, junto a una teoría de interpretación, da significado a una frase en la lógica formal.

Cuando diseñamos una representación del conocimiento (y un sistema de representación del conocimiento para interpretar frases en la lógica para poder derivar inferencias de ellas) tenemos que hacer elecciones a lo largo de múltiples ámbitos de diseño. La decisión más importante que hay que tomar es la expresividad de la representación del conocimiento. Cuanto más expresiva es, decir algo es más fácil y más compacto. Sin embargo, cuanto más expresivo es un lenguaje, más difícil es derivar inferencias automáticamente de él. Un ejemplo de una representación del conocimiento poco expresiva es la lógica proposicional. Un ejemplo de una representación del conocimiento muy expresiva es la lógica de predicados. Las representaciones del conocimiento poco expresivas pueden ser tanto completas como consistentes (formalmente menos expresivas que la teoría de conjuntos). Las representaciones del conocimiento más expresivas pueden ser ni completas ni consistentes.

Un mecanismo formal de razonamiento (o de inferencia, deducción, demostración) consiste en una colección de reglas que pueden ser aplicadas sobre cierta información inicial para derivar información adicional, en una forma puramente sintáctica. A continuación presentaremos uno de los mecanismos formales estándar de razonamiento para la lógica proposicional, el sistema axiomático (o deductivo) llamado $\mathscr{L}$.

Construcción del Lenguaje Sintáctico

Enunciados, Variables de Enunciado y Formas Enunciativas

La lógica, o al menos la lógica matemática, consiste en deducciones. Para examinar las reglas de deducción, hacemos uso de la precisión que caracteriza al enfoque matemático y dicha precisión implica hacer inequívoco el lenguaje introduciendo un lenguaje simbólico en el que los símbolos tengan significados y usos enunciados con toda precisión.

Consideraremos el hecho de que todas las frases simples van a ser verdaderas o falsas, es decir, tiene sentido decir si son verdaderas o falsas. Estos **enunciados** pueden ser simples o compuestos; los primeros son denotados mediante **variables de enunciado** "p, q, r, …" solamente, mientras que los segundos hacen uso, además de las variables, de símbolos representando a las conectivas: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Una **forma enunciativa** es una expresión en la que intervienen variables de enunciado y conectivas, que pueda formarse utilizando las reglas:

(i) Toda variable de enunciado es una forma enunciativa.

(ii) Si A y B son formas enunciativas, entonces $\sim$A, (A $\wedge$ B), (A$\vee$ B), (A $\Rightarrow$B) y (A$\Leftrightarrow$B) son formas enunciativas.

Todo enunciado simple es verdadero o falso, por lo que, a cada una de las variables de enunciado dadas, puede asignarse uno u otro **valor de verdad**: V (verdadero) o F (falso). La verdad o falsedad de un enunciado compuesto o forma enunciativa compuesta, depende de los valores de verdad de los enunciados simples o variables de enunciado que lo constituyen.

Recordemos la definición semántica de las conectivas estudiadas en Lógica I, mediante sus tablas de verdad. Así:

- La tabla de verdad de la **negación**, indica el valor de verdad de $\sim p$ a partir del valor de verdad de p. La conectiva $\sim$ da lugar a una función de verdad $f^{\sim}$, que en este caso es una función del conjunto {V, F} en si mismo, definida por la tabla de verdad. Luego:

$$f^{\sim}(V) = F$$

$$f^{\sim}(F) = V$$

- En la tabla de verdad de la **conjunción**, por ejemplo, de $p \wedge q$, observamos que la conjunción es verdadera únicamente cuando ambos valores de verdad son Verdaderos, en todas las demás posibles combinaciones de valores de verdad, es Falsa. Luego, la conectiva $\wedge$ define una función de verdad $f^{\wedge}$ de dos argumentos:

$$f^{\wedge}(V,V) = V \qquad f^{\wedge}(F,V) = F$$

$$f^{\wedge}(V,F) = F \qquad f^{\wedge}(F,F) = F$$

- En la tabla de verdad de la **disyunción**, por ejemplo, de $p \vee q$, observamos que la disyunción es falsa únicamente cuando ambos valores de verdad son falsos, en todas las demás posibles combinaciones de valores de verdad, es Verdadera. Luego, la conectiva $\vee$ define una función de verdad $f^{\vee}$ de dos argumentos:

$$f^{\vee}(V,V) = V \qquad f^{\vee}(F,V) = V$$

$$f^{\vee}(V,F) = V \qquad f^{\vee}(F,F) = F$$

- En la tabla de verdad del **condicional,** por ejemplo, de $p \Longrightarrow q$, observamos que el condicional es Falso únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es Falso, en todas las demás posibles combinaciones de valores de verdad, es Verdadero. Luego, la conectiva $\Rightarrow$ define una función de verdad $f^{\Rightarrow}$ de dos argumentos:

$$f^{\Rightarrow}(V,V) = V \qquad f^{\Rightarrow}(F,V) = V$$

$$f^{\Rightarrow}(V,F) = F \qquad f^{\Rightarrow}(F,F) = V$$

- En la tabla de verdad del **bicondicional,** por ejemplo, de $p \Leftrightarrow q$, observamos que el bicondicional es Verdadero únicamente cuando ambas variables tienen el mismo valor de verdad, en todas las demás posibles combinaciones de valores de verdad, es Falso. Luego, la conectiva $\Leftrightarrow$ define una función de verdad $f^{\Leftrightarrow}$ de dos argumentos:

$$f^{\Leftrightarrow}(V,V) = V \qquad f^{\Leftrightarrow}(F,V) = F$$

$$f^{\Leftrightarrow}(V,F) = F \qquad f^{\Leftrightarrow}(F,F) = V$$

✏ **Actividad 1:** Complete los espacios en blanco, estableciendo la analogía entre los conceptos que se dio al comienzo de la presente guía y los estudiados en Lógica Proposicional.

ENUNCIADO → ………………………………..

ENUNCIADO SIMPLE → ………………………………..

ENUNCIADO COMPUESTO → ………………………………..

VARIABLES DE ENUNCIADO → ………………………………..

FORMAS ENUNCIATIVAS → ………………………………..

✏ **Actividad 2:** A partir de la lectura del Capítulo I del libro "Lógica para Matemáticos" (Hamilton, 1981), defina lo siguiente:

- Forma enunciativa Tautológica
- Forma enunciativa Contradictoria
- Implicación lógica
- Equivalencia lógica.

✏ **Actividad 3:** Resuelva el ejercicio 5 y 6 de la página 19 del libro "Lógica para Matemáticos" (Hamilton, 1981).

Conjunto Adecuado de Conectivas

El conjunto de conectivas utilizado en el lenguaje analizado anteriormente es: $\{\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, y permite representar a todas las formas enunciativas del cálculo proposicional; por esta razón se dice que es un **conjunto completo de conectivas.** Sin embargo, dada cualquier forma enunciativa, mediante sucesivas aplicaciones de las leyes lógicas, se la puede escribir usando sólo un **subconjunto seleccionado** en forma **adecuada** de entre los elementos del conjunto completo $\{\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

Por ejemplo, si se considera el subconjunto **{~, ∧, ∨ }** se puede probar que cualquier forma enunciativa puede escribirse utilizando sólo las conectivas de este conjunto. Sea la forma enunciativa **(p ⇒ q)** ∧ **p** ⇒ **q**; cómo podemos observar contiene la conectiva ⇒ que no pertenece al conjunto **{~, ∧, ∨ }**, por lo que mediante sucesivas aplicaciones de las equivalencias lógicas (ya estudiadas en Lógica I) se la puede transformar en una expresión que contenga sólo los conectores del conjunto dado.

1) **(p ⇒ q) ∧ p ⇒ q** — **forma enunciativa que contiene ⇒**
2) ~((p ⇒ q) ∧ p) ∨ q — Por def del Condicional.
3) ~((~p ∨ q) ∧ p) ∨ q — Por def del Condicional
4) (~ (~p ∨ q) ∨ ~p) ∨ q — Por De Morgan.
5) ((~(~p) ∧ ~q) ∨ ~p) ∨ q — Por De Morgan.
6) **((p ∧ ~q) ∨ ~p) ∨ q** — Por doble negación.

Llegamos con este procedimiento a una forma enunciativa que sólo contiene las conectivas del conjunto **{~, ∧, ∨ }**. Así, en base a lo mencionado anteriormente, y al ejemplo presentado, podemos concluir que:

> Un **conjunto adecuado de conectivas** es un conjunto tal que toda función de verdad puede representarse por medio de una forma enunciativa en la que sólo aparezcan conectivas de dicho conjunto. Así, los pares {~, ∧}, {~, ∨} *y* {~, →} son conjuntos adecuados de conectivas.

✐ **Actividad 4:** A partir de la lectura y el análisis del marco teórico desarrollado en el Libro "Lógica para Matemáticos" (Hamilton, 1981) y lo desarrollado en la guía, responda:

a. ¿Es adecuado el conjunto de conectivas {~ , ⇔} ? Justifique su respuesta.
b. ¿Cuáles son las ventajas de contar con conjuntos adecuados de conectivas?
c. ¿Por qué el conjunto {∧ , ∨} no es adecuado? Justifique.

✐ **Actividad 5:** Complete el siguiente cuadro con las formas enunciativas que permiten demostrar sintácticamente que los **pares {~ , ∧ }, {~ , ∨ }** y **{~ , ⇒ }** son conjuntos adecuados de conectivas. A modo de ejemplo, se completa para el primer conjunto.

Conjunto adecuado de conectivas	Forma enunciativa	Forma equivalente
{~ , ∧ }	**A ∨ B**	~(~A ∧ ~B)
	A ⇒ B	~ (A ∧ ~B)
	A ⇔ B	~ (A ∧ ~B) ∧ ~ (B ∧ ~A)
{~ , ∨ }	**A ∧ B**	
	A ⇒ B	
	A ⇔ B	
{~ , ⇒ }	**A ∨ B**	
	A ∧ B	
	A ⇔ B	

*Recordar que A y B corresponden a letras del Metalenguaje, es decir son etiquetas en las que podemos ubicar cualquier forma enunciativa que sea sintácticamente correcta.

✎ **Actividad 6:** Resuelva.

a. Demuestre que mediante la aplicación de las equivalencias del cuadro construido en la actividad 5, la forma enunciativa **~ (~p ∨ q) ∨ r** es lógicamente equivalente a **(p ⇒ q) ⇒ r**.

b. Demuestre que **~ (p ∨ ~q) ⇒ (q ⇒ r)** es lógicamente equivalente a cada una de las siguientes expresiones:

i) ~(q ⇒ p) ⇒ ~q ∨ r,

ii) ~p ∧ q ⇒ ~(q ∧ ~r),

iii) ~(~q ∨ r) ⇒ (q ⇒ p)

iv) q ⇒ p ∨ r

A modo de ejemplo! Hacemos ítem i).

Conmutativa
Def. de condicional

$$\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \sim(\sim q \vee p) \Rightarrow (\sim q \vee r) \equiv$$

Def. de condicional

$$\equiv \sim(q \Rightarrow p) \Rightarrow (\sim q \vee r)$$

c. Resuelva los ejercicios 14, 15 y 16 de la página 31 del Capítulo I de Hamilton A. G. de Lógica para Matemáticos.

Sistemas Axiomáticos

En cualquier discurso lógico, se intenta definir explícitamente los elementos del discurso, las relaciones entre estos elementos y las operaciones que han de realizarse con ellos. No obstante, dichas definiciones han de emplear otros elementos, relaciones y operaciones, y estos también están sujetos a definiciones explícitas. Este proceso, no puede seguir infinitamente hacia atrás, por lo cual tenemos dos alternativas a tomar; o bien cortamos la cadena de definiciones en algún lado, o bien la hacemos circular. Como la circularidad no se tolera en un discurso lógico, las definiciones deben llevarse a cerrar en algún punto, por lo tanto, es necesario que a uno o más elementos, relaciones y operaciones no se les dé definición explícita. Estos se conocen con el nombre de términos primitivos, ya que no poseen una definición por sí mismos, pero se utilizan para definir a partir de ellos, otros elementos del sistema.

Además de los términos primitivos, se establecen los Axiomas. Un Axioma es una proposición evidente en sí misma y por lo tanto se entiende que no necesita demostración. Un sistema axiomático es una base elaborada a partir de varios axiomas, con ella se constituye una verdad sin requerimiento de demostración que permite avanzar y obtener nuevos resultados. El discurso contiene un conjunto de enunciados relacionados con los términos primitivos que deliberadamente se escogen como enunciados no demostrados. Estos se llaman postulados del discurso, y los que se deducen lógicamente de los postulados se denominan teoremas.

Por lo tanto, los sistemas axiomáticos son totalmente necesarios para la elaboración de otras teorías. Por ejemplo, llamemos SA_1 al siguiente sistema axiomático con lo siguiente:

Los términos primitivos son:

Los elementos: *puntos* y *rectas*
La relación entre elementos: *sobre*

El conjunto de Postulados es el siguiente:

P_1 : Existe al menos una recta.
P_2 : Si l es una recta, entonces existen al menos tres puntos sobre l.
P_3 : Si l es una recta, entonces existe un punto P que no está sobre l.

Los siguientes enunciados son enunciados deducibles de los postulados, es decir, son teoremas, del sistema SA_1:

No todas las rectas pasan a través del mismo punto.
Por cada punto pasan al menos tres rectas.

SISTEMA AXIOMÁTICO $\mathscr{L}$

Teniendo en cuenta lo desarrollado en el apartado precedente a éste, decimos que para especificar un sistema formal se requieren:

- Un alfabeto de símbolos.
- Un conjunto de cadenas finitas de dichos símbolos, llamadas fórmulas bien formadas (fbf).
- Un conjunto de fbf llamadas axiomas.
- Un conjunto finito de reglas de deducción (reglas que permiten deducir una fórmula bien formada como "consecuencia directa" de un conjunto finito de fórmulas bien formadas).

Dadas estos cuatro elementos, pueden construirse deducciones por medio de aplicaciones sucesivas de las reglas de deducción a partir de axiomas.

El **sistema formal** $\mathscr{L}$ del cálculo proposicional que se presenta en este apartado es el planteado por Luckasiewicz, es el que estudiaremos en la asignatura y cuyos elementos se definen a continuación:

SINTAXIS

La teoría sintáctica es la parte de la gramática que estudia las reglas y principios que gobiernan la combinatoria de constituyentes sintácticos y la formación de unidades superiores a estos, como los sintagmas y las oraciones gramaticales. A continuación, se desarrolla los elementos de la sintaxis que se definen dentro del sistema Axiomático $\mathscr{L}$.

El alfabeto y la gramática

a) Alfabeto de símbolos (infinito): ~, →, (,), p_1, p_2,...,

b) Conjunto de fórmulas bien formadas (fbf's) (gramática). En lugar de especificarlo explícitamente se da una regla con 3 partes:

   i. p_i es una fbf. para todo $i \geq 1$.
   ii. Si A y B son fbf., entonces (~A) y (A → B) son fbf.
   iii. El conjunto de todas las fbf. es el generado por (i) y por (ii).

Ejemplos: Las siguientes son fbf. del lenguaje del sistema $\mathscr{L}$.

- $p_1 \to (p_2 \to (p_1 \to \sim p_2))$
- $p_1 \to p_3$
- $\sim p_2 \to (p_1 \to \sim p_2)$

✏ **Actividad 7:** Dada las definiciones presentadas sobre alfabeto y gramática, resolver los siguientes puntos.

7.1. Analice cuáles de las siguientes son fbf. de $\mathscr{L}$. Justifique sus respuestas:

a) $(p_1 \to p_2) \to p_1$

b) $((p_1 \to p_2) \to \sim \ p_1) \to \sim \ (p_1 \wedge p_2)$

c) $(p_1 \to p_2) \to \sim \ p_1 \ \to \sim \ (p_1 \to p_2)$

d) $\sim p_2 \to (p_1 \sim p_2)$

7.2. Si A sustituye a la f.b.f. $(p_1 \to p_3)$ y B representa a la f.b.f. $(p_1 \to \sim p_2)$, escriba las f.b.f. siguientes:

a) $A \to B$; b) $\sim A$; c) $\sim A \to (B \to A)$.

7.3. Sean las f.b.f. a) $(\sim p_2 \to (p_1 \to \sim p_2))$; b) $((\sim p_2 \to p_1) \to \sim p_2) \to (\sim p_2 \to (p_1 \to \sim p_2))$
Use las letras del metalenguaje para escribir los esquemas que corresponden a cada una.

CONJUNTO DE AXIOMAS

Los axiomas son ciertas fórmulas en un lenguaje formal que son universalmente válidas, esto es fórmulas satisfechas por cualquier estructura y por cualquier función variable. En términos coloquiales son enunciados verdaderos en cualquier mundo posible, bajo cualquier interpretación posible, con cualquier asignación de valores. Comúnmente se toma como axioma un conjunto mínimo de tautologías suficientes para probar una teoría.
Hay infinitos axiomas de $\mathscr{L}$, los cuales se pueden especificar por medio de tres **esquemas**:

(L_1) $(A \to (B \to A))$

(L_2) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(L_3) $(((\sim A) \to (\sim B)) \to (B \to A))$

Donde A, B, C representan cualquier fórmula bien formada del sistema. Estos esquemas, no son los únicos posibles, y están presentes para proporcionar una base a partir de la cual deducir.

Para escribir un **axioma** por ejemplo a partir del esquema (L1) $(A \to (B \to A))$, un primer paso es determinar cuáles son las fbfs. del sistema $\mathscr{L}$ representadas por A y por B. Así, sea A / $(p_1 \to \sim p_2)$ y sea B /$\sim p_3$, el segundo paso, consiste en sustituir en el esquema, las letras del metalenguaje, por las fbfs., de tal manera que cada vez que aparezca una misma letra, sea sustituida por la misma fbf. Es decir, el ejemplo de axioma sería:

$$(p_1 \to \sim p_2) \to (\sim p_3 \to (p_1 \to \sim p_2))$$

__NOTA:__ Las letras A, B y C no forman parte del lenguaje del sistema L sino del METALENGUAJE.

Actividad 8: Dada la definición de esquema de axiomas, resolver los siguientes puntos.

8.1. Proponga por lo menos dos ejemplos de sustitución para cada uno de los esquemas de axiomas.

8.2. Dada las siguientes fbfs, indique el esquema de axioma correspondiente.

a) $((p_1 \to p_2) \to p_1)) \to (((p_1 \to p_2) \to p_3) \to ((p_1 \to p_2) \to p_1))$

b) $((p_1 \to p_2) \to p_1) \to ((\sim p_1 \to p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to p_1))$

c) $((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \sim p_3)) \to (((p_1 \to p_2) \to p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to \sim p_3))$

d) $(\sim((p_1 \to p_1) \to p_1) \to \sim((p_1 \to p_2) \to p_1)) \to (((p_1 \to p_2) \to p_1) \to ((p_1 \to p_1) \to p_1))$

8.3. Indique la diferencia entre axioma y esquema de axioma. Explique por qué se afirma que hay infinitos axiomas. Estos tres esquemas de axiomas, ¿son los únicos posibles?

8.4. ¿Cuál es el procedimiento para transformar un esquema de axioma en axioma?

8.5. Establezca la relación que existe entre el conjunto de todas las fbf de $\mathscr{L}$ y el conjunto de todos los axiomas de $\mathscr{L}$.

ABREVIATURAS

Los símbolos $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ no aparecen en el alfabeto de $\mathscr{L}$, de modo que las expresiones en las que intervengan no son parte de $\mathscr{L}$. Luego, para redefinir las fórmulas que no pertenecen al sistema $\mathscr{L}$ se deben considerar las siguientes definiciones del sistema:

- $(A \wedge B)$ es abreviatura de: $\sim (A \longrightarrow \sim B)$
- $(A \vee B)$ es abreviatura de: $\sim A \longrightarrow B$
- $(A \leftrightarrow B)$ es abreviatura de: $\sim \big((A \rightarrow B) \rightarrow \sim (B \rightarrow A)\big)$

$\{\sim, \rightarrow\}$ es un conjunto adecuado de conectivas, de manera que toda función de verdad estará representada por alguna fbf. de $\mathscr{L}$, y toda fórmula lógica será lógicamente equivalente a alguna fbf. de $\mathscr{L}$.

✎ **Actividad 9.**

9.1 Dada la definición de abreviaturas, utilice las definiciones del sistema para redefinir las siguientes fórmulas:

a) $p_1 \Leftrightarrow p_4$

b) $\sim p_2 \vee (p_1 \rightarrow \sim p_2)$

c) $(p_1 \wedge p_3)$

d) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \sim p_1) \rightarrow \sim (p_1 \wedge p_2)$

9.2 Explique por qué en este sistema se limita el número de conectivas. ¿Qué hubiera cambiado si en $\mathscr{L}$ se incluye el símbolo $\wedge$?

REGLA DE DEDUCCIÓN

En un sistema axiomático, un conjunto finito de “reglas de deducción”, permiten deducir una fbf. a partir de un conjunto finito de otras fbfs., en $\mathscr{L}$ hay solamente una regla de deducción, la regla de **Modus Ponens (MP),** que afirma lo siguiente,

> **Regla de deducción - MP**: de A y (A → B) se deduce como consecuencia directa B, siendo A y B fbf cualesquiera de $\mathscr{L}$.

✐ **Actividad 10:** Dada la formalización del MP, realice los siguientes puntos:

10.1. Reemplace en la regla de deducción las letras A y B, que se encuentran en metalenguaje, por fórmulas fbf. de $\mathscr{L}$.

10.2. Aplique la regla de deducción Modus Ponens (MP) para encontrar la fbf. que se deduce de: $(\sim p_2)$ y $(\sim p_2 \rightarrow (p_1 \rightarrow \sim p_2))$.

DEMOSTRACIÓN Y DEDUCCIÓN

Con los elementos del sistema presentados, se está en condiciones de encontrar nuevas fbfs. a partir de los axiomas y la aplicación de la regla de deducción MP, para lo cual se debe considerar los conceptos de demostración y de deducción.

- **Concepto de Demostración**

Una demostración en $\mathscr{L}$ es una sucesión finita de fbfs. A_1, A_2, ..., A_n tal que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple algunas de las siguientes condiciones:

1. A_i es un axioma de $\mathscr{L}$.
2. A_i se infiere inmediatamente de dos miembros anteriores de la sucesión, mediante la aplicación de la regla MP.

Si la fbf. A_n es el último miembro de una demostración, se dice que A_n es un **teorema** de $\mathscr{L}$ y se escribe $\vdash_L$ A.

Ejemplo 1: (ejemplo 2.4 de página 40)

Demostrar que la fbf. $\vdash_L (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1)$ es un teorema de $\mathscr{L}$

(1)	$((p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1))$	L2
(2)	$(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$	L1
(3)	$((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1))$	MP,(1)(2)

Ejemplo 2:

Demostrar el Teorema de Identidad $\vdash A \to A$

(1)	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	(L2).
(2)	$(A \to ((A \to A) \to A)$	(L1).
(3)	$((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	(1), (2) MP.
(4)	$((A \to (A \to A))$	(L1).
(5)	$(A \to A)$	(3), (4) MP.

✐ **Actividad 11:**

11.1 Dada la definición y los ejemplos de demostración, aplique el sistema anterior para demostrar en $\mathscr{L}$ las siguientes f.b.fs.:

a) $\vdash_{\mathscr{L}}$ $(p_1 \to p_2) \to ((\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1))$

b) $\vdash_{\mathscr{L}}$ $(p_1 \to (p_2 \to (p_1 \to p_2))$

c) $\vdash_{\mathscr{L}}$ $(((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to (((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3))$

Tenga en cuenta lo siguiente:

Para la realización de una demostración:

1. Si la fórmula a demostrar, B, guarda identidad formal, es decir, es un caso particular de uno de los esquemas de axiomas, la prueba está hecha.
2. Cuando no se cumpla el primer criterio, se hará coincidir la fórmula a demostrar, B, (mediante las oportunas sustituciones) con el consecuente de un condicional, $A \to B$, de cualquiera de las fórmulas o esquemas de fórmulas ya probadas.
3. Finalmente, se intentará liberar ese consecuente, B, del antecedente, A, que lo condiciona mediante la aplicación de la regla MP. Previamente, habrá sido necesario obtener el antecedente, A, del condicional haciendo uso, de las manipulaciones (1) a (3).

11.2 ¿Cuál es el primer miembro de una demostración y cuántos pasos puede tener?

11.3 Establezca la relación entre axioma y teorema, entre fbf y teorema.

- **Concepto de Deducción**

Sea Γ un conjunto de fbf's de $\mathscr{L}$. Una sucesión finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de fbfs. de L, es una deducción a partir de Γ si para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ si cumple algunas de las siguientes condiciones:

1. A_i es un axioma de $\mathscr{L}$.
2. $A_i \in \Gamma$
3. A_i se infiere inmediatamente de dos miembros anteriores de la sucesión, mediante la aplicación de la regla MP.

Notación: $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} A_n$.

El último miembro, A_n de una sucesión finita que sea una deducción a partir de Γ, se dice que es *deducible a partir de* Γ, o que es una consecuencia de Γ en $\mathscr{L}$.

El símbolo $\vdash_{\mathscr{L}}$ no es un símbolo de $\mathscr{L}$ y $\Gamma \vdash_L A_n$, lejos de ser parte de $\mathscr{L}$ es un enunciado acerca de $\mathscr{L}$, el enunciado que afirma que la fbf A_n es derivable a partir de Γ.

Una demostración en $\mathscr{L}$ es una deducción en $\mathscr{L}$ sin premisas, es decir "$\vdash_{\mathscr{L}} A$" es una abreviatura de "$\varnothing \vdash_{\mathscr{L}} A$".

A modo de aplicar este concepto de deducción, analice el ejemplo 2.6 de pág. 41 de Hamilton y las observaciones que se desprenden al final (leer pág. 41 y 42).

Sean A, B y C fbf's cualesquiera de $\mathscr{L}$, probar que,

$\{A, (B \rightarrow (A \rightarrow C))\} \vdash_L (B \rightarrow C)$

(1)	A	Premisa
(2)	$(B \rightarrow (A \rightarrow C))$	Premisa
(3)	$((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)))$	L2
(4)	$((B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C))$	MP,(2)(3)
(5)	$(A \rightarrow (B \rightarrow A))$	L1
(6)	$(B \rightarrow A)$	MP,(1)(5)
(7)	$(B \rightarrow C)$	MP,(4)(6)

<u>IMPORTANTE:</u> *Sólo cuando se instancian las variables metalingüísticas por fbf's se obtienen deducciones y teoremas de $\mathscr{L}$.*

Por ejemplo: Si instanciamos: A/ p_1 , B/ $p_2 \rightarrow p_3$, C/ ~p_2 obtenemos la siguiente deducción en $\mathscr{L}$..

$$\{ p_1, ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow {\sim}p_2))\} \vdash_L ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow {\sim}p_2)$$

<u>Nota</u>: Tanto en las demostraciones como en las deducciones, es posible utilizar en el procedimiento resultados ya probados anteriormente.

✐ **Actividad 12:** Dada la definición y los ejemplos de deducción, realicen los siguientes puntos;

12.1. Deduzca que, para fbf's cualesquiera A, B, C de $\mathscr{L}$, se verifica lo que sigue:

a) $\{ ({\sim}A) \} \vdash_{\mathscr{L}} A \rightarrow B$

b) $\{ ({\sim}({\sim}A)) \} \vdash_{\mathscr{L}} A$

c) $\{ A \rightarrow (B \rightarrow C))\} \vdash_{\mathscr{L}} (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

12.2 ¿Cuál puede ser el primer miembro de una deducción y cuántos pasos puede tener?

12.3 Establezca las analogías y diferencias que existen entre los conceptos de demostración y de deducción.

TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN

Como se ha podido apreciar, deducir en un sistema axiomático puede ser complejo y poco intuitivo. Una manera de hacer menos ardua la tarea de la deducción, o de la demostración de teoremas, es permitir que todo teorema de $\mathscr{L}$ pueda ser usado como premisa en una deducción e insertado en cualquier punto de una demostración.

Otro modo de facilitar la tarea de la demostración consiste en usar ciertos metateoremas, que tienen el efecto de reglas de inferencia adicionales, tales como el siguiente que aceptaremos sin demostrar:

Teorema de la Deducción (TD)

Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathscr{L}} B$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} (A \rightarrow B)$, siendo A y B fbfs de $\mathscr{L}$ y Γ un conjunto de fbf's de $\mathscr{L}$ (eventualmente vacío).

El recíproco de este teorema también se verifica:

Sean A y B fbf's de $\mathscr{L}$ y Γ un conjunto de fbf's de $\mathscr{L}$ (que puede ser vacío). Si $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} (A \rightarrow B)$ entonces $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathscr{L}} B$.

Ejemplo de aplicación del TD (corolario 2.10 de página 45 de Hamilton)

Sean A, B y C fbf's de $\mathscr{L}$, demostrar $\vdash_{\mathscr{L}} (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Aplicando el TD sucesivamente, se tiene

$\{(A \rightarrow B)\} \vdash_L ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\} \vdash_L (A \rightarrow C)$

$\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C), A\} \vdash_L C$

(1)	$(A \rightarrow B)$	Premisa
(2)	$(B \rightarrow C)$	Premisa
(3)	A	Premisa
(4)	B	MP de (1) y (2)
(5)	C	MP de (2) y (4)

El resultado anterior se denomina **Regla del Silogismo Hipotético** y puede entenderse como una regla de inferencia que dice:

Si se ha deducido $(A \rightarrow B)$ y $(B \rightarrow C)$ como línea inmediatamente siguiente, en una deducción, se puede inferir $(A \rightarrow C)$.

✐ **Actividad 13:** Use el Teorema de la Deducción para deducir que las siguientes fbf's son teoremas de $\mathscr{L}$:

a) $A \rightarrow (\sim(\sim A))$
b) $((B \rightarrow A) \rightarrow ((\sim A) \rightarrow (\sim B))$
c) $\sim(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Una **estructura deductiva** es una representación formal de un proceso de razonamiento para obtener una conclusión a partir de unas premisas.

La formalización de las estructuras deductivas en teoría de la demostración tiene como elementos principales:

- Un sistema de fórmulas válidas construido rigurosamente a partir de:
  - Una serie de "formas o esquemas de fórmulas" que se asumen como válidas por hipótesis (axiomas del sistema).

- Unas reglas de demostración o inferencia que permiten obtener nuevas fórmulas válidas a partir de los axiomas.

- Una definición de deducción que permite, aplicando las reglas del sistema, representar cualquier deducción correcta por una fórmula válida en el sistema formal.

Una **estructura deductiva** se define como **correcta** cuando la fórmula resultante se obtiene mediante un proceso de deducción.

El teorema de la deducción es fundamental en teoría de la demostración, ya que permite definir una relación entre las estructuras deductivas correctas y las fórmulas válidas.

Corolario: Dada una estructura deductiva correcta siempre es posible encontrar una fórmula válida que la representa.

A modo de justificar el corolario, basta aplicar el teorema de la deducción de forma sucesiva a, por ejemplo:

$$\{A_1, A_2, A_3\} \vdash_{\mathscr{L}} A_4$$
$$\{A_1, A_2\} \vdash_{\mathscr{L}} A_3 \rightarrow A_4$$
$$\{A_1\} \vdash_{\mathscr{L}} A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow A_4)$$
$$\vdash_{\mathscr{L}} A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow A_4))$$

La fórmula $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow A_4))$ es un teorema del sistema, ya que fue obtenido por un proceso de **demostración** a partir de un conjunto de **premisas vacío**.

En resumen, a cada estructura deductiva correcta le corresponde una fórmula válida, y recíprocamente a cada fórmula válida le corresponde una estructura deductiva correcta.

✏ **Actividad 14:** Escribir un ejemplo de axioma correspondiente a cada esquema de axioma y aplique dos veces el T.D. a cada uno de los axiomas de $\mathscr{L}$ para transformarlos en una deducción. ¿Es correcta dicha deducción? ¿Por qué?

TEORÍA SEMÁNTICA

La teoría semántica del cálculo proposicional utiliza la misma simbolización de las fórmulas (letras proposicionales y conectivas) con las que venimos trabajando. Sin embargo, el sistema de fórmulas, o estructuras deductivas válidas, no se construye a partir de axiomas y reglas de inferencias, sino mediante una simbolización del **significado** de las proposiciones, es decir, de la forma de valorar el contenido de información de cada proposición. Por ello, se denomina **semántico** este tipo de formalización del cálculo proposicional.

Los elementos en que se basa la descripción del sistema con este planteamiento son:

a) Un **conjunto de significados** atribuibles a las proposiciones.
b) Una **definición semántica de conectivas**.
c) Una **definición semántica de deducción correcta.**

A continuación se desarrollan cada uno de estos elementos:

Conjunto de Significados

El conjunto de significados con que se valora el contenido de información de una proposición está constituido por:

- V para simbolizar el significado «verdadero»
- F para simbolizar el significado «falso»

Denominados **valores de verdad** de una proposición.

Definición Semántica de Conectivas

Las conectivas generan un significado de las proposiciones compuestas, a partir del significado de las proposiciones simples que la componen. Para ello se utilizan *tablas de relación entre significados* de las proposiciones componentes y la compuesta por cada conectiva; estas tablas se denominan **tablas de verdad.**

- **Negación**

La negación de una proposición sustituida por la variable p es la proposición ~p (no p). Se trata de una **operación unaria o monádica**, ya que a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación. Su tabla de verdad es:

p	**~p**
V	F
F	V

- **Condicional**

Los elementos del condicional **p ⇒ q** se denominan **antecedente (p)** y **consecuente (q).** Es una **operación binaria o diádica** porque a partir de **dos** proposiciones atómicas, obtenemos una molecular. La tabla de valores de verdad es:

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El condicional es **falso,** cuando su **antecedente es verdadero** y su **consecuente es falso**; en todos los otros casos, es verdadero.

Definición Semántica de Deducción Correcta

Dada una estructura deductiva: $P_1, P_2, P_3,\ldots, P_n \Rightarrow Q$

Se define como correcta, cuando no existe ninguna interpretación que simultáneamente haga $P_1, P_2, P_3,\ldots, P_n$ verdaderos y Q falso. Es decir, que de premisas verdaderas se deduzca una conclusión falsa. Luego, todo modelo de las premisas es modelo de la conclusión.

✐ **Actividad 15:** A partir de la lectura y análisis de la página 87 del libro "Lógica Informática" (Cuena) Capítulo 4, responda los siguientes apartados:

15.1. Defina:

- Interpretación de una fórmula
- Modelo
- Fórmula satisfacible
- Fórmula semánticamente válida.

15.2. Escriba ejemplos de fórmulas satisfacibles.

15.3 Justifique la siguiente aseveración: “Una fbf. de L es un teorema si y sólo si es una tautología.”

15.4 Demuestre que: “Todo axioma de L es una tautología.”

15.5 Enuncie y demuestre el Teorema de la Deducción en la teoría semántica. Página 90.

LIMITACIONES DEL SISTEMA

Podemos observar que en el universo del discurso de esta lógica no hay objetos, sino afirmaciones que se formulan sobre objetos. Esto hace que el poder expresivo, y por tanto la utilidad de esta lógica resulte pobre. En los razonamientos deductivos hay normalmente premisas que expresan conocimiento sobre objetos, lo que es imposible formalizar en la lógica proposicional a menos, claro está, que forcemos la conceptualización particularizando lo general. En la siguiente unidad estudiaremos una lógica más expresiva, la lógica de predicados, que nos permitirá representar relaciones entre objetos.